0.1 Spectral Sequence

Definition 0.1.1 （２重加群）

整数の対 $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対し、加群 $E_{p,q}$が与えられたとき、

$$E = \{E_{p,q}\}_{(p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$$

を２重加群と呼び、D, E を二つの２重加群としたとき、$(r,s) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ で、すべての $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対し準同型、

$$\varphi_{r,s} : D_{p,q} \longrightarrow E_{p+r,q+s}$$

が定義されたとき、$\varphi : D \longrightarrow E$ とかき、(r,s) 準同型と呼ぶ。また、$r+s$ を準同型の全次数と呼ぶ。

Remmark 0.1.2

E を２重加群とする。

$$E_n = \bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}$$

とおけば、$\{E_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ は次数つき加群となり、$\varphi : D \longrightarrow E$ を２重加群間の (r,s) 準同型 とする。

$$\varphi_{r+s} = \varphi_{r,s} : \bigoplus_{p+q=n} D_{p,q} \longrightarrow \bigoplus_{p'+q'=n+r+s} E_{p',q'}$$

とすれば、

$$\varphi : D \longrightarrow E$$

は次数つき加群間の $r+s$ 準同型となる。このとき、$\deg\varphi = (r,s)$ とかく。

つまり、２重加群は次数つき加群の一般形である。

Definition 0.1.3 （２重複体）

２重加群 E において、全次数 -1 の自己準同型、

$$d : E \longrightarrow E$$

が与えられ、$d \circ d = 0$ を満たすとき (E,d) を２重複体 (Dauble Chain Complex) と呼ぶ。

２重複体は chain complex の一般形である。

Definition 0.1.4

二つの２重複体 $(D, \partial_D), (E, \partial_E)$ に対し、

$$\varphi : D \longrightarrow E$$

が２重加群間の準同型で、

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial_D"'] & E \arrow[d, "\partial_E"] \\ D \arrow[r, "\varphi"'] & E \end{tikzcd}$$

を満たすとき、２重複体間の準同型と呼ぶ。

Definition 0.1.5

２重複体に対し、

$$H_{**}(E) = \mathrm{Ker}d/\mathrm{Im}d$$

が定義できる。また、２重複体間の準同型

$$f : D \longrightarrow E$$

からホモロジー間の準同型

$$f_{**} : H_{**}(D) \longrightarrow H_{**}(E)$$

が誘導される。

Definition 0.1.6 *Spectral Sequence*

２重複体の集まり、

$$\{E^r = E^r_{**}, d^r\}_{r \geqq 0}$$

が次の条件を満たすとき、スペクトル列と呼ぶ。

1. $\deg d^r = (-r, r-1)$
2. 各 r に対し、$H_{**}(E^r) \cong E^{r+1}_{**}$ が存在する。

Definition 0.1.7

二つのスペクトル列 D^r, E^r に対し、2 重複体間の準同型の集まり、

$$f_r : D^r \longrightarrow E^r$$

が、

$$\begin{tikzcd} D^{r+1}_{**} \arrow[r, "f_{r+1}"] \arrow[d, "\cong"'] & E^{r+1}_{**} \arrow[d, "\cong"] \\ H_{**}(D^r) \arrow[r, "f_{r**}"'] & H_{**}(E^r) \end{tikzcd}$$

を満たすとき、$\{f_r\}_{r \geqq 0}$ をスペクトル列の準同型と呼ぶ。また各 f_r が同型のときスペクトル列の同型と呼ぶ。

Remmark 0.1.8

$\{E^r, d^r\}$ が spectral 列であるとき、

$$Z^0 = \mathrm{Ker} d^0 \ , \ B^0 = \{0\}$$

で考えれば、$H(E^0) = Z^0/B^0$ である。ここで、$E^1 \cong H(E^0)$ であったから、これを同一視すると、$d^1 : E^1 \longrightarrow E^1$ は、

$$d^1 : Z^0/B^0 \longrightarrow Z^0/B^0$$

と考えられる。$p : Z^0 \longrightarrow Z^0/B^0$ を projection とすると、

$$Z^1 = p^{-1}(\mathrm{Ker} d^1) \ , \ B^1 = p^{-1}(\mathrm{Im} d^1)$$

で定義すると、

$$Z^0 \supset Z^1 \supset B^1 \supset B^0$$

となり、$\mathrm{Ker} d^1 = Z^1/B^0$, $\mathrm{Im} d^1 = B^1/B^0$ であるので、

$$H(E^1) = \mathrm{Ker} d^1/\mathrm{Im} d^1 \cong Z^1/B^1$$

となる。以下この構成を帰納に繰り返すと、

$$Z^0 \supset Z^1 \supset \cdots \supset Z^r \supset \cdots \supset B^r \supset \cdots \supset B^1 \supset B^0$$

という E^0 の部分加群の列が誕生し、各 r について $Z^r/B^r \cong H(E^r)$ となる。

Definition 0.1.9 *Spectral* 列の極限

$\{E^r, d^r\}$ が spectral 列であるとき、上記の列

$$Z^0 \supset Z^1 \supset \cdots \supset Z^r \supset \cdots \supset B^r \supset \cdots \supset B^1 \supset B^0$$

に対し、$Z^\infty = \bigcap_{r=0}^{\infty} Z^r$, $\bigcup_{r=0}^{\infty} B^r$ とおき、

$$E^\infty = Z^\infty / B^\infty$$

で定義し spectral 列 E^r の極限と呼ぶ。E^∞ と E^r らの関係は一般には定かでないので次の条件を考える。

Definition 0.1.10 *Spectral* 列の収束

$\{E^r, d^r\}$ が spectral 列であるとき、${}^\forall(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対し、$r(p,q) \in \mathbf{Z}$ が存在して、${}^\forall r \geqq r(p,q)$ のとき、$E^r_{p,q} = \mathrm{Ker} d^r_{p,q}$ となるとき、E^r は収束する spectral 列と呼ぶ。

Remmark 0.1.11

$\{E^r, d^r\}$ が収束する spectral 列のとき、十分大きな r に関して $E^r_{p,q} = \mathrm{Ker} d^r_{p,q}$ ということなので、projection

$$p_r : E^r_{p,q} = \mathrm{Ker} d^r_{p,q} \longrightarrow \mathrm{Ker} d^r_{p,q} / \mathrm{Im} d^r_{p,q} = H_{p,q}(E^r) \cong E^{r+1}_{p,q}$$

を考えれば、

$$E^r_{p,q} \xrightarrow{p_r} E^{r+1}_{p,q} \xrightarrow{p_{r+1}} E^{r+2}_{p,q} \longrightarrow \cdots$$

の列が誕生するため、帰納的極限 colim $E^r_{p,q}$ が考えられる。

Theorem 0.1.12

$\{E^r, d^r\}$ が収束する spectral 列のとき、$E^\infty_{p,q} \cong \mathrm{colim}\ E^r_{p,q}$

proof) 十分大きな r に対し、$E^{r+1}_{p,q} \cong H_{p,q}(E^r) = Z^r_{p,q} / B^r_{p,q}$ であるため、

$$\begin{array}{ccccc}
E^{r+1} & \longrightarrow & E^{r+2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\
Z^r_{p,q}/B^r_{p,q} & \longrightarrow & Z^{r+1}_{p,q}/B^{r+1}_{p,q} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

であるため、colim $E^r_{p,q} \cong$ colim $Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}$ となる。

$$Z^0 \supset Z^1 \supset \cdots \supset Z^r \supset \cdots \supset B^r \supset \cdots \supset B^1 \supset B^0$$

の列を考えれば、colim $Z^r_{p,q}/B^r_{p,q} \cong Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q} = E^\infty_{p,q}$ である。

□

収束する spectral 列の条件をさらに強めてみる。

Definition 0.1.13

$\{E^r, d^r\}$ が spectral 列であるとき、$^\forall(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に対し、$r(p,q) \in \mathbf{Z}$ が存在して、$^\forall r \geqq r(p,q)$ のとき、$E^r_{p,q} \cong E^{r+1}_{p,q}$ となるとき、E^r は強収束する spectral 列と呼ぶ。

Remmark 0.1.14

$\{E^r, d^r\}$ が spectral 列であるとき、強収束するならば収束する。

proof)　　十分に大きい r に対し、

$$E^r \cong E^{r+1} \cong H(E^r) \cong \mathrm{Ker}d^r/\mathrm{Im}d^r$$

であるため、$E^r = \mathrm{Ker}d^r$ である。

□

Remmark 0.1.15

$\{E^r, d^r\}$ が強収束する spectral 列であるとき、$E^\infty_{p,q} \cong E^r_{p,q} \quad (r \geqq r(p,q))$

proof)　　十分大きな r に対し、colim $E^r_{p,q} \cong E^r$である。

□

Definition 0.1.16　*Filter*

A を次数付き加群とするとき、その部分次数付き加群の列、

$$\cdots \subset F_sA \subset F_{s+1}A \subset \cdots$$

$A = \displaystyle\bigcup_s^\infty F_sA$ となるとき $\{F_sA\}_{s\in\mathbf{Z}}$を A の Filter と呼ぶ。

さらに、$\displaystyle\bigcap_s^\infty F_sA = 0$ のとき完備な Filter と呼ぶ。

Definition 0.1.17

次数つき加群 A に Filter が与えられたとき、

$$GA_{s,t} = F_sA_{s+t}/F_{s-1}A_{s+t}$$

と 2 重加群を定義する。

Remmark 0.1.18

A を chain complex としたとき、A の Filter は各 $s \in \mathbf{Z}$ に対し、F_sA が部分複体であるとする。このとき GA は 2 重複体となる。

Definition 0.1.19

A を chain complex とし Filter が与えられているとき、inclusion

$$i_s : F_sA \longrightarrow A$$

において、$F_sH(A) = \mathrm{Im}\ [\ i_{s*} : H(F_sA) \longrightarrow H(A)\ ]$ と定義する。

Lemma 0.1.20

A を chain complex とし Filter が与えられているとき、$F_sH(A)$ は $H_*(A)$ の Filter である。

proof) $j_s : F_sA \longrightarrow F_{s+1}A$ を inclusion とすれば、

$$\begin{tikzcd} H_*(F_sA) \arrow[rr, "j_{s*}"] \arrow[dr, "i_{s*}"'] & & H_*(F_{s+1}A) \arrow[dl, "i_{s+1*}"] \\ & H_*(A) & \end{tikzcd}$$

$$F_sH(A) = \mathrm{Im}(i_s)_* = \mathrm{Im}((i_{s+1*}) \circ (j_{s*})) \subset \mathrm{Im}(i_{s+1*}) = F_{s+1}H(A)$$

であり、ホモロジーが帰納的極限と可換であることを考えれば、

$$\bigcup F_sH(A) = \bigcup i_{s*}(H(F_s(A))) = H_*(\bigcup F_sA) = H_*(A)$$

である。

□

ただし、$\{F_s\}$ が完備であっても、$\{F_sH(A)\}$ は完備とは限らない。そこで次の条件を付け加える。

Definition 0.1.21

A を chain complex とし $\{F_sA\}$ をその filter とする。各 $t \in \mathbf{Z}$ に対し、$s(t) \in \mathbf{Z}$ が存在し、$F_{s(t)}A_t = 0$ となるとき、この filter を強完備と呼ぶ。

Remmark 0.1.22

A の filter が強完備ならば完備である。

Remmark 0.1.23

A の filter が強完備ならば $\{F_sH(A)\}$ は強完備である。

proof)　　十分小さな s に対し、$F_sA = 0$ であるため、$F_sH(A) = H(F_sA) = 0$ なので強完備である。

Theorem 0.1.24

A を完備な filter$\{F_sA\}$ が与えられた chain complex とする。このとき、

$$E^1 = H(GA)\ ,\ E^\infty = GH(A)$$

となる spectral 列 $\{E^r, d^r\}$ が存在する。また、$\{F_sA\}$ が強完備ならば E^r は収束する。

proof)

この定理によりフィルターが強完備ならば、$E^1 = H(GA)$ から順次 E^r を計算し、$E^\infty = GH(A)$ さらに $H(A)$ に行き着くことが原理的に可能である。